7–8 классы. Решения задач

1. Все гномы делятся на лжецов и рыцарей. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. На каждой клетке доски 4×4 стоит по гному. Известно, что среди них есть и лжецы, и рыцари. Каждый гном заявил: «Среди моих соседей (по стороне) лжецов и рыцарей поровну». Сколько всего лжецов?

Ответ. 12 лжецов.

Решение. Любой гном, стоящий у стороны квадрата, но не в углу, не может говорить правду, потому что у него три соседа, а значит, среди них не может быть поровну рыцарей и лжецов, поэтому все эти восемь гномов — лжецы. Тем самым, гномы, стоящие в углах, — тоже лжецы, потому что оба их соседа — лжецы, а не рыцарь и лжец. Итак, все гномы, кроме четырёх центральных, — лжецы. Поскольку среди гномов есть рыцари, хотя бы один из четырёх центральных — рыцарь. Два его соседа уже точно лжецы, значит, два оставшихся — рыцари. Чтобы у любого из этих двух соседей-рыцарей было поровну рыцарей и лжецов среди соседей, нужно, чтобы и четвёртый центральный гном был рыцарем. Получается, что всего 12 лжецов. На рисунке ниже рыцари обозначены буквой Р, а лжецы — буквой Л.

Л	Л	Л	Л
Л	Р	Р	Л
Л	Р	Р	Л
Л	Л	Л	Л

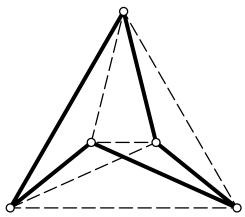
2. На доске выписаны все целые числа от 1 до двузначного числа n. Дима посчитал, сколько всего цифр выписано. Оказалось, что общее число цифр записывается теми же цифрами, что и n, но в обратном порядке. Найдите все такие n.

Ответ. $n = 36$.

Решение. От 1 до 9 ровно девять цифр, от 10 до n ровно $n - 9$ двузначных чисел, то есть $2n-18$ цифр. Значит, число $2n-18+9 = 2n-9$ записывается теми же цифрами, что и n. Если a — число десятков в n, а b — число единиц, то $2\cdot(10a+b)-9 = 10b+a$, то есть $19a = 8b+9$. Перебирая b от 0 до 9, убеждаемся, что правая часть делится на 19 только при $b = 6$. Соответственно, $a = 3$, то есть $n = 36$.

3. Нарисуйте два многоугольника, у которых все вершины совпадают и нет ни одной общей стороны.

Решение. Например, так:

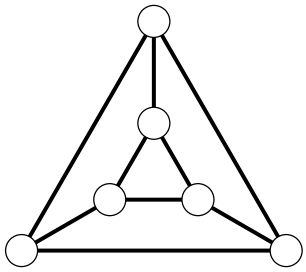


4. Существует ли такое натуральное число n, что в числе $n^2 + 3$ ровно десять цифр, причём все они различны?

Ответ. Нет, не существует.

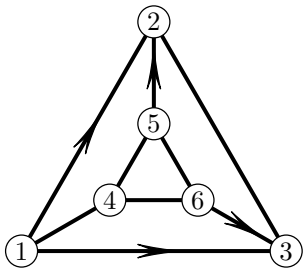
Решение. Если в десятизначном числе $n^2 + 3$ все цифры различны, то оно делится на 9 (по признаку делимости на 9: сумма его цифр равна 45). Но тогда оно делится на 3, а значит, и само число n делится на 3, так как 3 — простое. А тогда $n^2 + 3$ даёт остаток 3 при делении на 9 — противоречие.

5. На рисунке некоторые кружки соединены между собой. Можно ли в каждый из 6 кружков вписать натуральное число так, чтобы в каждой паре кружков, соединённых отрезком, одно число делилось на другое, а в несоединённых парах такого не было?



Ответ. Нет, нельзя.

Решение. Предположим,что это возможно. Выберем из трёх внешних кружков тот, в котором написано самое маленькое число (если их несколько, возьмём любой из них). Пусть, например, это кружок номер 1 (см. рисунок). Будем рисовать стрелку от одного кружка к другому, если число во втором кружке делится на число в первом кружке.



Тогда от кружка номер 1 идут стрелки к кружкам номер 2 и 3, так как числа в них не меньше, чем в кружке номер 1. Получается, что от кружка номер 2 не может идти стрелка к кружку номер 5, потому что иначе число, написанное в кружке 5, будет делиться на число в кружке 1, а так не должны быть; значит, стрелка идёт от 5 к 2. Аналогично, стрелка идёт от 6 к 3. Но тогда мы не можем никуда направить стрелку между 5 и 6: если она идёт от 5 к 6, то число в кружке 3 делится на число в кружке 5, а так не должно быть, а если наоборот, то число в кружке 2 делится на число в кружке 6 — тоже противоречие.

9 класс. Решения задач

1. Дискриминанты трёх приведённых квадратных трёхчленов равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из этих трёхчленов так, чтобы сумма трёх выбранных корней равнялась сумме трёх оставшихся.

Решение. *I способ.* Пусть b_1, b_2, b_2 — коэффициенты при x в этих квадратных трёхчленах. Тогда их корни равны $\frac{-b_1+1}{2}$, $\frac{-b_1-1}{2}$, $\frac{-b_2+2}{2}$, $\frac{-b_2-2}{2}$, $\frac{-b_3+3}{2}$, $\frac{-b_3-3}{2}$. Нужно выбрать первый, третий и шестой корни.

II способ. Дискриминант приведённого квадратного трёхчлена равен квадрату разности его корней. (Это вытекает из явной формулы для корней или из теоремы Виета.) Значит, модули разностей корней этих трёхчленов равны 1, 2 и 3. Пусть a, b — корни первого трёхчлена, c, d — второго, e, f — третьего. Пусть $a > b$, $c > d$, $e > f$, тогда $a = b + 1$, $c = d + 2$, $e = f + 3$, значит, $a + c + f = b + d + e$.

2. При каком наименьшем натуральном n существуют такие натуральные a и b, что

$$\text{НОД}(a, b) = 999 \text{ и } \text{НОК}(a, b) = n!$$

(здесь $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$)?

Ответ. $n = 37$.

Решение. Поскольку НОК(a, b) делится на НОД$(a, b) = 999 = 27 \cdot 37$, а число 37 простое, $n \geqslant 37$. С другой стороны, при $n = 37$ числа $a = 37!$, $b = 999$ годятся.

3. Докажите, что $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 \geqslant 0$ для любых действительных чисел x, y.

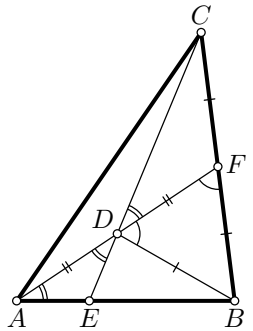
Решение. *I способ.* Выделяя полный квадрат в левой части, получим выражение $5(x+y)^2 - 2xy + 2y - 2x + 2$, то есть $5(x+y)^2 - 2(y-1)(x+1)$. Замена $a = x+1$, $b = y-1$ даёт равносильное неравенство $5(a+b)^2 - 2ab \geqslant 0$, то есть $5a^2 + 8ab + 5b^2 \geqslant 0$. Если $b = 0$, то это очевидно, а иначе, поделив обе части на b^2, приходим к равносильному неравенству $5t^2 + 8t + 5 \geqslant 0$, где $t = b/a$, которое очевидно выполняется для всех вещественных t, так как дискриминант левой части отрицателен.

II способ. Заметим, что левая часть равна

$$(4x^2 + 8xy + 4y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) = 4(x + y)^2 + (x - 1)^2 + (y + 1)^2 \geqslant 0.$$

4. В треугольнике ABC проведена медиана AF. Точка D — середина отрезка AF, E — точка пересечения прямой CD и стороны AB. Известно, что $BD = BF$. Докажите, что $AE = DE$.

Решение. Углы BDF и BFD равны как углы при основании равнобедренного треугольника BDF ($BD = BF$ по условию). Значит, равны и дополняющие их до развёрнутого угла углы BDA и DFC. Поскольку $AD = DF$ и $BD = CF$ по условию, треугольники ABD и DCF равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому углы BAD и CDF равны как соответственные углы в этих треугольниках. Наконец, углы ADE и CDF равны как вертикальные. Таким образом, $\angle ADE = \angle DAE$, поэтому треугольник ADE равнобедренный: $AE = DE$.



5. У Вовы в журнале стоит 19 оценок по математике, все двойки и тройки, причём первые четыре оценки — двойки. Оказалось, что среди четвёрок подряд идущих оценок Вовы встречаются все 16 возможных комбинаций из четырёх двоек и троек. Какие у Вовы последние четыре оценки?

Ответ. 3222.

Решение. Заметим, что четвёрок подряд идущих оценок в строке из 19 оценок Вовы ровно 16, то есть каждая встречается ровно по одному разу. После первых четырёх двоек должна идти тройка, иначе комбинация из четырёх двоек будет встречаться дважды. Значит, после комбинации 3222 не может идти ни 2, ни 3, так как в обоих случаях возникает комбинация, которая уже встречалась. Следовательно, комбинация 3222 стоит в конце строки.

10 класс. Решения задач

1. Целые числа a, b и c таковы, что $|a|+|b|+|c|-|a+b+c|=2$. Докажите, что хотя бы одно из чисел a, b, c равно 1 или -1.

Решение. Все три числа a, b, c не могут быть одновременно неотрицательными или одновременно отрицательными, так как тогда левая часть равнялась бы нулю. Предположим, что два числа неотрицательны, а одно отрицательно. (Случай, когда два числа отрицательны, а одно неотрицательно, рассматривается аналогично.) Пусть, к примеру, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c < 0$. Тогда $a+b-c-|a+b+c|=2$. Если $a+b+c \geqslant 0$, то $a+b-c-a-b-c=2$, то есть $-2c=-2$, откуда $c=-1$. Если же $a+b+c<0$, то $a+b-c+a+b+c=2$, то есть $2a+2b=2$, откуда $a+b=1$. Но a и b — целые неотрицательные числа, поэтому одно из них равно 0, а второе равно 1. В обоих случаях есть число, равное 1 или -1.

2. Докажите, что если числа a и b положительны, то

$$\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a} \geqslant 8.$$

Решение. Согласно неравенству Коши (неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом),

$$\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a} \geqslant 2\cdot\frac{(a+1)\cdot(b+1)}{\sqrt{ab}} = 2\cdot\frac{ab+a+b+1}{\sqrt{ab}} =$$
$$= 2\cdot\left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{ab+1}{\sqrt{ab}}\right) = 2\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)+\left(\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)\right).$$

Согласно тому же неравенству Коши, каждое слагаемое в скобках в правой части не меньше 2, поэтому всё произведение не меньше 8.

3. Шахерезада рассказывала султану сказки на протяжении 1001 ночи. Сначала она рассказывала ему по 27 сказок за ночь, потом ей стало лень, и она какое-то время рассказывала по 14 сказок за ночь, а последние несколько ночей она рассказывала всего по одной сказке. Могло ли так быть, что общее число рассказанных ей султану сказок — натуральная степень двойки?

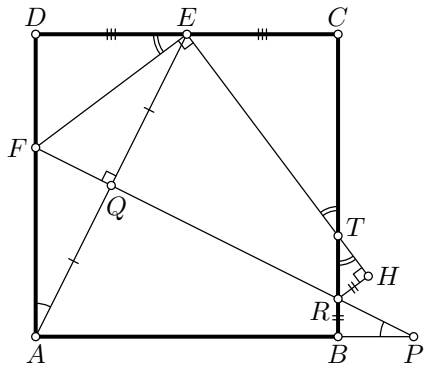
Ответ. Нет, не могло.

Решение. Пусть Шахерезада рассказывала a ночей по 27 сказок, b ночей по 14 сказок и c ночей по одной сказке. Тогда $a+b+c=1001$. Если же общее количество сказок равно 2^k, то $27a+14b+c=2^k$, откуда $26a+13b=2^k-1001$ (мы вычли из второго соотношения первое). Но 2^k не делится на 13, а остальные члены в этом выражении делятся, противоречие.

4. Бумажный квадрат $ABCD$ со стороной 1 перегнули по прямой так, что вершина A совпала с серединой стороны CD. Чему равна площадь получившегося шестиугольника?

Ответ. 61/96.

Решение. Рисунок таков:



Пусть E — середина стороны CD, Q — середина AE, $FQ \perp AE$, R — точка пересечения прямой FQ со стороной BC, P— точка её пересечения с прямой AB, $ET \perp FE$, $RH \perp TH$. Перегнуть лист бумаги по прямой — это сделать осевую симметрию относительно этой прямой. Раз точка A переходит в точку E, то прямая, по которой мы перегибали, — это ось симметрии, то есть серединный перпендикуляр к отрезку AE; у нас на рисунке это прямая FQ. Нам нужно найти площадь шестиугольника $RHTCDF$. По теореме Пифагора для треугольника ADE, $AE = \sqrt{5}/2$. Прямоугольные треугольники ADE и AQF подобны, поэтому

$$AF = AE \cdot AQ/AD = 5/8.$$

Треугольник FAP тоже им подобен, поэтому $AP = 2AF = 5/4$, откуда

$$S_{FAP} = AF \cdot AP/2 = 25/64.$$

Далее, треугольник PBR тоже им всем подобен, поэтому $RB = PB/2 = 1/8$, так как

$$PB = PA - AB = 5/4 - 1 = 1/4,$$

откуда $S_{PBR} = 1/64$. Наконец, $HR = BR = 1/8$, треугольник RHT подобен треугольнику FDE, поэтому $TH = RH \cdot ED/FD = 1/6$ (ибо $FD = 3/8$), а значит, $S_{THR} = 1/96$. Окончательно,

$$S_{RHTCDF} = S_{ABCD} - S_{FAP} + S_{PBR} + S_{THR} = 61/96.$$

5. В квадрате $n \times n$ лежит 1014 доминошек (каждая покрывает две соседние по стороне клетки). Никакие две доминошки не имеют общих точек (даже угловых). При каком наименьшем n это возможно?

Ответ. При $n = 77$.

Решение. Присоединим к каждой доминошке четыре клетки справа и снизу так, чтобы они образовывали прямоугольник 2×3 (если доминошка лежит вертикально) или 3×2 (если она лежит горизонтально). Если у двух доминошек такие прямоугольники имеют хотя бы одну общую клетку, то у доминошек есть общая точка. Поэтому если 1014 доминошек, не имеющих общих точек, умещаются в квадрате $n \times n$, то все построенные по ним прямоугольники из 6 клеток должны без наложений помещаться в квадрате $(n + 1) \times (n + 1)$, полученном добавлением к квадрату $n \times n$ строки снизу и столбца справа. Отсюда

$$(n + 1)^2 \geqslant 6 \cdot 1014 = 6084 = 78^2.$$

Значит, $n \geqslant 77$.

Осталось привести пример, когда это возможно при $n = 77$. Для этого положим в первую строку доминошки горизонтально, начиная с первой клетки, с интервалом в одну клетку; всего их уместится 26. То же проделаем со всеми остальными нечётными строками. Общее число доминошек будет тогда $26 \cdot 39 = 1014$; они, очевидно, не имеют общих точек.

11 класс. Решения задач

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\cos 3x - 1} = \sin x.$$

Ответ. $x = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Решение. Найдём область определения: поскольку подкоренное выражение должно быть неотрицательно, $\cos 3x \geqslant 1$, значит, $\cos 3x = 1$, откуда $3x$ может равняться только $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из первого условия видим, что k должно быть чётным. Окончательно, $x = 2\pi m$, где m — целое.

2. Коля решил изобрести шишечный язык. Для этого он берёт несколько шишек, которые бывают зелёными и не зелёными, и выкладывает их в ряд. Сколько десятишишечных слов будет в шишечном языке, если единственное правило грамматики гласит, что две зелёные шишки не могут лежать подряд?

Ответ. 144 слова.

Решение. Будем обозначать зелёную шишку буквой З, а не зелёную —буквой Н. Для произвольного натурального $n \geqslant 1$ обозначим через a_n число слов длины n в шишечном языке. К примеру, $a_1 = 2$ (слова З и Н), $a_2 = 3$ (слова ЗН, НЗ и НН). Для любого $a \geqslant 3$ заметим,что

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Действительно, разделим все слова длины n на две группы: те, в которых первая шишка зелёная, и те, в которых первая шишка не зелёная. В слове из второй группы после первой не зелёной шишки может стоять любой набор из $n-1$ шишки, удовлетворяющий правилу из условия, то есть любое слово шишечного языка длины $n-1$. Значит, во второй группе a_{n-1} слово. С другой стороны, в слове из первой группы после зелёной шишки должна стоять не зелёная, а потом — любое слово длины $n-2$, то есть в первой группе a_{n-2} слов, откуда и получаем требуемое выражение для a_n. (Другими словами, a_n — это просто число Фибоначчи.) Теперь последовательно находим $a_3 = 5$, $a_4 = 8$, $\ldots$, $a_{10} = 144$.

3. Найдите все пары натуральных чисел m и n, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОК}(m,n) + \text{НОД}(m,n) = m + n, \\ m - n = 2015. \end{cases}$$

Ответ. Возможные варианты для пары (m, n): (2016, 1), (2020, 5), (2028, 13), (2046, 31), (2080, 65), (2170, 155), (2418, 403), (4030, 2015).

Решение. *I способ.* Произведение НОК и НОД любых двух натуральных чисел равно произведению этих чисел. Из этого факта, первого уравнения и теоремы Виета следует, что НОК и НОД чисел m и n являются корнями того же приведённого квадратного трёхчлена, что и сами m и n, а значит, они равны m и n (в каком-то порядке). Поскольку $m > n$ (из второго уравнения), m — это НОК, а n — это НОД. Получается, что $m = kn$ для какого-то натурального $k > 1$. Тогда из первого уравнения

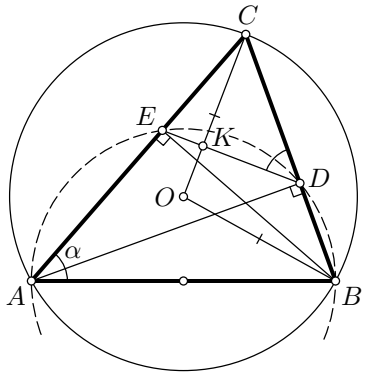
$$(k-1)n = 2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31.$$

Таким образом, n может быть любым натуральным делителем числа 2015, а m находится из второго уравнения, что и даёт указанный выше ответ.

II способ. Пусть $n = ad$, $m = bd$, где d — их НОД, а числа a и b взаимно просты. Тогда НОК равно abd; из первого уравнения получаем, что $abd + d = ad + bd$, то есть $ab + 1 = a + b$, откуда $(a-1)(b-1) = 0$. Значит, хотя бы одно из чисел a и b равно 1. Второе уравнение показывает, что $m > n$, поэтому $a = 1$, $b > 1$, то есть m делится на n. Далее как в первом способе.

4. Дан остроугольный треугольник ABC. В нём проведены высоты AD и BE и отмечен центр описанной окружности O. Докажите, что $CO \perp DE$.

Решение. Рисунок таков:



Обозначим $\alpha = \angle BAC$. Поскольку оба угла AED и BDE прямые, четырёхугольник $ABDE$ — вписанный. Значит, $\angle BDE = 180^\circ - \angle BAE = 180^\circ - \alpha$ и $\angle CDE = 180^\circ - \angle BDE = \alpha$. С другой стороны, $\angle BOC = 2\alpha$ как центральный угол, опирающийся на ту же дугу в окружности, описанной около треугольника ABC, что и вписанный угол BAC. Из равнобедренного треугольника BOC ($BO = OC$ как радиусы) находим $\angle BCO = (180^\circ - 2\alpha)/2 = 90^\circ - \alpha$. Если теперь K — точка пересечения прямых CO и DE, то в треугольнике KCD углы KCD и KDC равны $90^\circ - \alpha$ и α соответственно, поэтому $\angle DKC$ — прямой.

5. Пусть a, b, c, $d \geqslant 0$, $a + b + c + d = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} < 6.$$

Решение. Подберём такое положительное число x, для которого выполняется условие

$$a + x \geqslant \sqrt{4a+1}.$$

Поскольку обе части этого неравенства больше нуля, возведение в квадрат является равносильным преобразованием. Возведя обе части в квадрат, перенеся всё в левую часть и группируя слагаемые, получим такое неравенство:

$$a^2 + (2x-4)a + (x^2-1) \geqslant 0.$$

Оно будет верным, к примеру, если дискриминант квадратного трёхчлена от a, стоящего в левой части, равен нулю: $D = 16x - 20 = 0$, откуда $x = 5/4$. Итак, $a + 5/4 \geqslant \sqrt{4a+1}$; такое же неравенство, разумеется, выполняется и для b, c, d. Складывая эти четыре неравенства, получим:

$$a + b + c + d + 4 \cdot 5/4 \geqslant \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1}.$$

Левая часть равна $1 + 5 = 6$, так как $a + b + c + d = 1$ по условию. Осталось заметить, что равенство возможно только в случае, когда $a + 5/4 = \sqrt{4a+1}$ и т.п., то есть $a = b = c = d = 3/4$, что противоречит условию.